N° 4 *a*, 4 *b*, 4 *c*, 10.

The results of papers N° 1 and 2 puzzled Fermi, because they contradict each other, if it is assumed, as required by general relativity, that the gravitational and inertial mass are the same. Moreover, the value (4/3) (U/c^2), obtained by Lorentz as well as by Fermi for the inert mass of a rigid, spherically symmetrical system of electric charges, was at variance with Einstein's principle of equivalence of mass and energy. It is now well known that the factor 4/3 can be interpreted as due to the part of the energetic tensor contributed by the internal non-electromagnetic stresses, whose existence must be assumed to assure the equilibrium of the charges. However, in the books known to Fermi, this discrepancy was not explained (he had evidently overlooked the explanation contained in M. von Laue, *Die Relativitätstheorie*, I, 3rd ed., 1919, p. 218), and so he found for it an explanation of his own, essentially equivalent to the former but obtained through Weyl's variational method.

Prof. Polvani remembers that the question was debated, one winter evening of 1922, in Pisa, while Fermi, Puccianti, Polvani and other friends walked through via San Frediano from the University to the Scuola Normale Superiore. Here the company parted without having reached any satisfactory conclusion. In the following two days, Fermi did not appear in the Institute of Physics. The third day he arrived with a paper, ready for publication, entitled «Correzione di una grave discrepanza . . . ». Puccianti, who had emphasized the need for a clarification, was enthusiastically happy.

This result, of which Fermi was particularly proud, was published by him, with minor alterations, in three different journals (N° 4 *a*, 4 *b*, 4 *c*). Subsequently, in collaboration with A. Pontremoli (a young physicist, then an assistant at the University of Rome, who later was to disappear tragically in the Nobile polar expedition of 1928) Fermi applied the same method to the calculation of the mass of the radiation contained in a cavity with reflecting walls, for which Abraham and others had found an expression containing the same factor 4/3 (see paper N° 10).

E. PERSICO.

4 *c*.

CORREZIONE DI UNA CONTRADDIZIONE TRA LA TEORIA ELETTRODINAMICA E QUELLA RELATIVISTICA DELLE MASSE ELETTROMAGNETICHE (*)

« Nuovo Cimento », *25*, 159–170 (1923).

§ 1. – La teoria delle masse elettromagnetiche fu studiata per la prima volta da M. Abraham [1] prima della scoperta della teoria della relatività. Abraham perciò, come era naturale, considerò nei suoi calcoli la massa di

(*) Sullo stesso argomento vedi due mie Note sui « Rend. Acc. Lincei » (5), 31, pp. 184, 306 (1922).

(1) ABRAHAM, *Theorie der Electricität*; RICHARDSON, *Electron Theory of Matter*. Cap. XI; LORENTZ, *The Theory of Electrons*, p. 37.

un sistema di cariche elettriche rigido nel senso della meccanica classica, e trovò che, nell'ipotesi che tale sistema avesse simmetria sferica, la sua massa era variabile con la velocità e precisamente eguale a [2] $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$ (essendo u l'energia elettrostatica del sistema e c la velocità della luce) per velocità nulle o molto piccole, mentre per velocità v confrontabili con c intervenivano dei termini di correzione un po' complicati, dell'ordine di grandezza di v^2/c^2. Prima ancora della teoria della relatività, Fitz Gerald introdusse l'ipotesi che i corpi solidi subissero nella direzione del loro moto una contrazione nel rapporto

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} : 1$$

e Lorentz rifece la teoria delle masse elettromagnetiche di Abraham, considerando invece che sistemi di cariche elettriche rigidi nel senso della meccanica classica, dei sistemi che subissero questa contrazione. Il risultato fu che la massa di quiete, ossia il limite della massa per velocità nulle, era sempre $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$, mentre venivano alterati i termini correttivi dipendenti da $v^2 : c^2$. Le esperienze di Kaufmann, Bucherer e altri sulla massa delle particelle β dei corpi radioattivi, e delle particelle catodiche di grande velocità, si decisero nettamente a favore della teoria di Lorentz, così detta dell'elettrone contrattile, contro quella di Abraham, dell'elettrone rigido. E ciò fu in un primo tempo interpretato come prova della natura esclusivamente elettromagnetica della massa degli elettroni, perché si pensava che altrimenti la loro massa avrebbe dovuto essere costante. Scoperta in seguito la teoria della relatività, questa portò alla conseguenza che tutte le masse, fossero esse o no elettromagnetiche, dovevano variare con la velocità come quella dell'elettrone contrattile di Lorentz; per modo che le esperienze indicate vennero a lasciare indecisa la natura totalmente elettromagnetica o no della massa elettronica, venendo a costituire esclusivamente una conferma della teoria della relatività. D'altra parte la stessa teoria della relatività in senso stretto, e più ancora in seguito quella generale, condussero ad attribuire ad un sistema dotato dell'energia u la massa $u : c^2$, per modo che venne a sorgere una grave discrepanza tra la teoria elettrodinamica di Lorentz, che attribuisce ad una distribuzione sferica di elettricità la massa di quiete $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$, e la teoria della relatività che le attribuisce invece la massa u/c^2. Ed una tale differenza [3] si presenta particolarmente grave, data la grande importanza della nozione di massa elettromagnetica come base della teoria elettronica della materia.

(2) Si dice ordinariamente che la massa elettromagnetica di uno strato elettrico sferico omogeneo di carica e, e di raggio r è $\frac{2}{3}\frac{e^2}{rc^2}$; se però si osserva che l'energia elettrostatica è $u = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r}$, si trova appunto la massa $= \frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$.

(3) Le esperienze di Kaufmann ecc. non possono naturalmente servire in questo caso a decidere quale dei due risultati è il giusto, perché esse permettono soltanto di misurare i termini correttivi che dipendono dalla velocità e che sono eguali secondo entrambi le teorie, mentre la differenza è invece tra le masse di quiete.

Tale discrepanza mi si presentò in particolar modo stridente in due recenti Note [4] in una delle quali, sulla base delle ordinarie teorie elettrodinamiche considerai le masse elettromagnetiche di sistemi a simmetria qualunque, trovando che in generale sono rappresentate da tensori invece che da scalari, che si riducono naturalmente a $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$ nel caso della simmetria sferica; nell'altra invece, partendo dalla teoria generale della relatività, considerai il peso dei medesimi sistemi, che trovai in ogni caso eguale a $\frac{u}{c^2}$ G, essendo G l'accelerazione di gravità.

Nel presente lavoro dimostreremo precisamente: che la differenza tra i due valori della massa ottenuti nei due modi ha origine in un concetto di corpo rigido in contraddizione col principio di relatività che si applica nella teoria elettrodinamica (anche in quella dell'elettrone contrattile) e che conduce alla massa $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$, mentre la nozione di corpo rigido più giustificata e conforme alla teoria della relatività conduce invece al valore u/c^2.

Notiamo ancora che la dinamica relativistica dell'elettrone fu svolta da M. Born [5] che però, partendo da un punto di vista non essenzialmente diverso dall'ordinario trovò naturalmente come massa di quiete $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$.

Nelle nostre considerazioni prenderemo a base il principio di Hamilton come quello più adatto allo studio di un problema soggetto a vincoli alquanto complicati; invero il nostro sistema di cariche elettriche deve soddisfare ad un vincolo di natura diversa da quelli considerati nella meccanica ordinaria, dovendo esso, dipendentemente dalla propria velocità, presentare la contrazione di Lorentz, in conseguenza del principio di relatività. Notiamo però fin d'ora, ad evitar malintesi, che mentre la contrazione di Lorentz è dell'ordine di v^2/c^2, la sua influenza sopra la massa elettromagnetica verte sui termini principali di questa, cioè sulla massa di quiete ed ha perciò un'importanza assai maggiore, essendo apprezzabile anche per velocità piccolissime.

§ 2. – Consideriamo dunque un sistema di cariche elettriche, sostenute da un dielettrico rigido che, sotto l'azione di un campo elettromagnetico in parte dovuto al sistema stesso e in parte a cause esterne si muova di moto traslatorio descrivendo un tubo orario nello spazio tempo [6].

Vediamo con precisione che cosa debba intendersi per moto traslatorio rigido. Consideriamo perciò un qualunque sistema di riferimento di Lorentz–Einstein e supponiamo che per esso a un certo istante un punto del sistema di cariche abbia velocità nulla; diremo che il moto è traslatorio se con tali ipotesi nello stesso riferimento, per quell'istante, tutti i punti del sistema hanno velocità nulla. Ciò equivale a dire che le linee orarie dei punti del nostro sistema sono traiettorie ortogonali di una famiglia di spazi lineari;

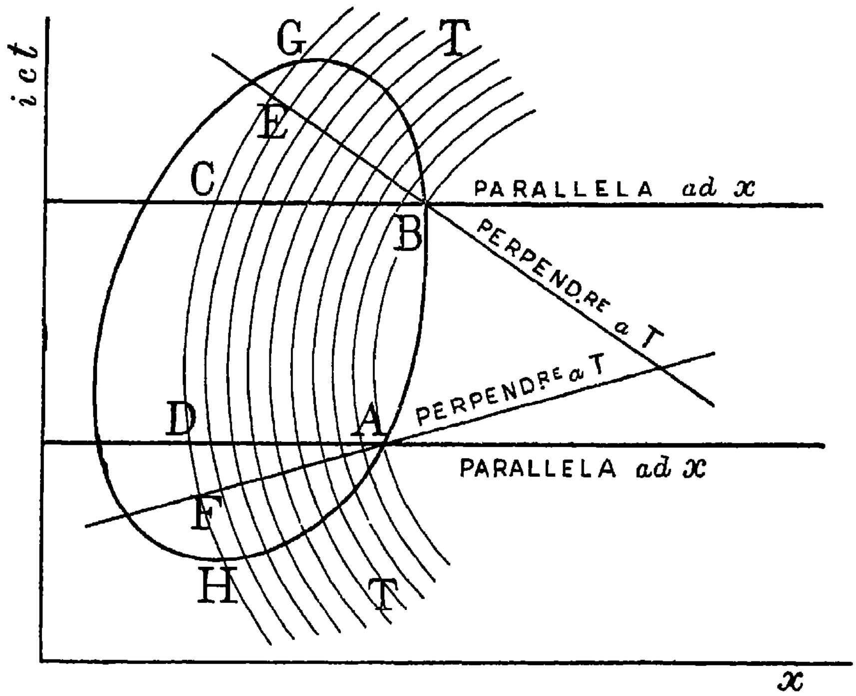
(4) E. FERMI, «N. Cim.», VI, 22, pp. 176, 192 (1921).

(5) MAX BORN, «Ann. d. Phys.», 30, p. 1 (1909).

(6) In tutto il seguito si riguarda lo spazio tempo come euclideo, perché si intende che i campi elettromagnetici che in esso si considerano siano abbastanza poco intensi per non alterarne sensibilmente la struttura metrica.

ed infatti in un riferimento di Lorentz–Einstein in cui lo spazio sia uno degli spazii della famiglia e l'asse di tempo sia naturalmente perpendicolare ad esso tutto il sistema è in quiete al tempo zero, perché lo spazio taglia ortogonalmente le linee orarie di tutti i punti del sistema. Con questa definizione di moto traslatorio, che in sostanza è quella adottata da M. Born, la rigidità del sistema viene espressa dal fatto che la sua figura in questi spazi perpendicolari al tubo resta invariabile, ossia che tutte le sezioni rette del tubo sono tra di loro eguali.

Per poter applicare al caso nostro il principio di Hamilton ci occorre avere una variazione del movimento del nostro sistema conforme ai vincoli del problema, ossia alla rigidità, giustamente interpretata. Ora noi mostreremo che si giunge al valore $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$ oppure a quello u/c^2 per la massa



elettromagnetica, secondo che per tale variazione si prende una o l'altra delle due che andiamo ad illustrare e che distinguiamo con le lettere A e B. La variazione A però, come immediatamente si vedrà, è da scartarsi perchè in contraddizione col principio di relatività. Sia T il tubo orario descritto dal sistema. Nella figura lo spazio (x, y, z) è rappresentato su una sola dimensione dall'asse x, ed al tempo t è sostituito ict per aver una metrica definita.

Variazione A: si considera come variazione soddisfacente il vincolo della rigidità uno spostamento infinitesimo, rigido nell'ordinario senso cinematico, parallelo allo spazio (x, y, z), di ogni sezione del tubo parallela allo spazio medesimo. Nella figura otterremo dunque tale variazione spostando parallelamente all'asse x ogni sezione $t =$ cost del tubo di un segmento infinitesimo arbitrario. Se ci limitiamo a considerare spostamenti traslatorii avremo dunque δx, δy, δz funzioni arbitrarie del solo tempo, e $\delta t = 0$.

Variazione B: si considera come variazione soddisfacente al vincolo della rigidità uno spostamento infinitesimo perpendicolare al tubo di ogni sezione normale del tubo medesimo, rigido nell'ordinario senso cinematico. Nella figura otterremo tale variazione spostando parallelamente a sè, di un segmento arbitrario, ogni sezione normale del tubo.

Di tali due variazioni *quella* A *è in manifesta contraddizione col principio di relatività* e da scartarsi perchè, non essendo neppure invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, essa è determinata invero dal particolare riferimento (t, x, y, z) che abbiamo scelto, non può esser l'espressione di nessuna nozione fisica, come quella della rigidità. La variazione B invece, oltre a soddisfare evidentemente la detta condizione di invarianza, poichè è costituita solo con elementi inerenti al tubo T e del tutto indipendenti dalla posizione degli assi di riferimento, è l'unica che si presenti spontanea, come quella che prende a base uno spostamento virtuale rigido nel sistema di riferimento rispetto al quale, all'istante che si considera, il sistema di cariche ha velocità nulla. Ora con un'osservazione superficiale potrebbe far tuttavia l'impressione che la differenza tra le conseguenze dei due sistemi di variazione A e B dovesse farsi sentire soltanto per velocità considerevoli, quando cioè il tubo T ha una notevole inclinazione sull'asse del tempo. Invece i calcoli che andiamo a sviluppare dimostreranno subito che la differenza si sente già per velocità nulle, e che appunto A dà come massa elettromagnetica $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$ mentre B dà invece $\frac{u}{c^2}$.

§ 3. – Indichiamo, secondo la comodità, con (t, x, y, z) oppure con (x_0, x_1, x_2, x_3) le coordinate di tempo e di spazio e sia φ_i il quadripotenziale ed

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

il campo elettromagnetico, **E** ed **H** le forze elettrica e magnetica, che si deducono da esso.

Il principio di Hamilton che riassume le leggi di Maxwell Lorentz e quelle della meccanica ci dice che (7): l'azione complessiva, ossia la somma delle azioni del campo elettromagnetico e delle masse materiali ed elettriche, subisce variazione nulla per effetto di una variazione arbitraria delle φ_i e delle coordinate dei punti delle linee orarie delle cariche elettriche conforme ai vincoli e che si annulli sul contorno della regione di integrazione. Nel caso nostro non ci sono masse materiali, e gli unici elementi che si facciano variare sono le coordinate dei punti delle linee orarie delle cariche; basta perciò considerare solo l'azione delle cariche elettriche, cioè:

$$W = \sum_i \int de \int \varphi_i \, dx_i$$

dove *de* è l'elemento generico di carica elettrica ed il secondo integrale deve essere esteso a quell'arco di linea oraria descritta da *de* che è contenuto nel campo quadridimensionale G di integrazione. Per ogni sistema di variazioni δx_i conforme ai vincoli e *che si annulla sul contorno di* G deve dunque aversi

(7) WEYL., «Raum, Zeit, Materie», pp. 194–196; Berlin, Springer (1921).

$\delta W = 0$, cioè:

$$\sum_{ik} \int\int de \, F_{ik} \, \delta x_i \, dx_k = 0 \,. \tag{1}$$

Bisogna ora esaminare separatamente i risultati che si ottengono mettendo al posto dei δx_i i valori dati dal sistema di variazioni A o da quello B.

§ 4. – *Conseguenze del sistema di variazioni* A. — In questo caso il campo di integrazione si riduce semplicemente ad ABCD. Ed invero i campi BCG, ADH danno contributo nullo, poiché in essi tutti i δx_i si annullano dovendo esser nulli sul contorno di G, e quindi nei tratti BG, AH ed aver valore costante per t costante, ossia sulle parallele all'asse x. Se con t_1 e t_2 indichiamo i tempi di A e di B la (1) può scriversi, essendo $\delta t = 0$ ed i δx, δy, δz funzioni del solo tempo:

$$\sum_{ik} \int_{t_1}^{t_2} dt \, \delta x_i \int de \, F_{ik} \frac{dx_k}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3) \quad (k = 0, 1, 2, 3) \,.$$

Siccome poi δx_i sono funzioni arbitrarie di t, ne ricaviamo le tre equazioni

$$\int de \sum_k F_{ik} \frac{dx_k}{dt} = 0$$

ossia:

$$\int de \left[E_x + \frac{dy}{dt} H_z - \frac{dz}{dt} H_y \right] = 0 \qquad \text{e le due analoghe.}$$

Se all'istante che si considera il nostro sistema ha velocità nulla nel riferimento (t, x, y, z) le tre equazioni si riassumono nell'unica vettoriale:

$$\int \mathbf{E} \, de = 0 \,. \tag{2}$$

A questa equazione saremmo giunti senza calcoli se, come si fa nelle trattazioni ordinarie e come in sostanza fa M. Born nel lavoro citato, avessimo supposto a priori nulla la forza totale agente sul sistema. Abbiamo appunto voluto dedurla col principio di Hamilton per mostrare il vizio della sua origine, poiché essa segue dal sistema di variazioni A che è in contraddizione col principio di relatività. Dalla (2) segue subito il valore $\frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$ come massa elettromagnetica. Supponiamo infatti che $\mathbf{E}$ sia la somma di una parte $\mathbf{E}^{(i)}$ dovuta al sistema stesso, più un campo $\mathbf{E}^{(e)}$ uniforme dovuto a cause esterne. La (2) ci dà:

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de + \mathbf{E}^{(e)} \int de = 0 \,.$$

Ora $\int de = e =$ carica; e quindi $\mathbf{E}^{(e)} \int de = \mathbf{F} =$ forza esterna. D'altra parte nel caso della simmetria sferica, sia il calcolo diretto, sia la ben nota considerazione del momento elettromagnetico [8] mostrano che:

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de = -\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}\boldsymbol{\Gamma},$$

essendo $\boldsymbol{\Gamma}$ l'accelerazione.

L'equazione precedente diventa dunque:

$$\mathbf{F} = \frac{4}{3}\frac{u}{c^2}\boldsymbol{\Gamma}$$

che confrontata con la legge fondamentale della dinamica del punto, $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\Gamma}$, ci dà:

$$m = \frac{4}{3}\frac{u}{c^2}\,.$$

§ 5. – *Conseguenze del sistema di variazioni* B. — In questo caso le stesse considerazioni del § precedente dimostrano che il campo di integrazione si riduce ad ABEF, ossia alla regione compresa tra due sezioni normali del tubo T. Decomponiamola per mezzo di infinite sezioni normali in infiniti strati di spessore infinitesimo, e per calcolare il contributo di uno di questi all'integrale (1) riferiamoci al suo riferimento di quiete, prendendo lo spazio $(x\,,y\,,z)$ parallelo allo strato. Per esso sarà allora $\delta t = 0$, mentre $\delta x\,,\,\delta y\,,\,\delta z$ saranno costanti qualunque. Sarà inoltre $dx = dy = dz = 0$, perché la velocità di tutti i punti è nulla, $dt =$ altezza dello strato, che varierà da punto a punto, perché lo strato ha per basi due sezioni normali in generale non parallele. Se O è un punto generico ma fissato dello strato, per esempio l'origine delle coordinate, in cui dt ha il valore dt_0, $\mathbf{K}$ il vettore con l'orientazione della normale principale alla linea oraria passante per O e grandezza eguale alla sua curvatura, si ha manifestamente, essendo dt lo spessore nel punto generico P dello stato:

$$dt = dt_0\,[1 - \mathbf{K}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})]\,.$$

Siccome la velocità è nulla si ha semplicemente

$$\mathbf{K} = -\boldsymbol{\Gamma} : c^2\,,$$

e quindi:

$$dt = dt_0\left(1 + \frac{\boldsymbol{\Gamma}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2}\right).$$

Sostituendo questi valori si trova che il contributo del nostro strato all'integrale (1) è:

$$-dt_0\left\{\delta x\int\left(1 + \frac{\boldsymbol{\Gamma}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2}\right)\mathrm{E}_x\, de + \delta y\int\left(1 + \frac{\boldsymbol{\Gamma}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2}\right)\mathrm{E}_y\, de\right.$$
$$\left. + \delta z\int\left(1 + \frac{\boldsymbol{\Gamma}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2}\right)\mathrm{E}_z\, de\right\}.$$

Questa espressione deve annullarsi per tutti i valori di $\delta x\,,\,\delta y\,,\,\delta z$, otteniamo dunque da essa tre equazioni che si riassumono nell'unica vettoriale:

$$\int\left(1 + \frac{\boldsymbol{\Gamma}\,(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2}\right)\mathbf{E}\, de = 0\,. \tag{3}$$

(8) RICHARDSON loc. cit.

Una corretta applicazione del principio di Hamilton ci ha dunque condotto alla (3) invece che alla (2). È ora facilissimo esaminare le conseguenze. Ponendo infatti:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(e)}$$

si trova:

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de + \int \mathbf{E}^{(i)} \frac{\Gamma \cdot (\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2} de + e\,\mathbf{E}^{(e)} + \mathbf{E}^{e} \int \frac{\Gamma \cdot (\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2} de = 0 .$$

Nel caso della simmetria sferica si ha come sopra

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de = -\frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \Gamma ;$$

sostituendo nella precedente si trova che $\mathbf{E}^{(e)}$ è confrontato solo con termini che contengono Γ. Se trascuriamo dunque i termini (9) in Γ^2, possiamo trascurare l'ultimo integrale, ed otteniamo:

$$-\frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \Gamma + \int \mathbf{E}^{(i)} \frac{\Gamma \cdot (\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2} de + \mathbf{F} = 0 . \tag{4}$$

Per calcolare l'integrale che ancora figura in (4) osserviamo che $\mathbf{E}^{(i)}$ è la somma della forza di Coulomb

$$= \int \frac{\mathrm{P}-\mathrm{P}'}{r^3} de'$$

(P′ è il punto potenziante di carica de' ed $r = \overline{\mathrm{PP}'}$), e di un termine contenente Γ che può trascurarsi perché darebbe un contributo contenente Γ^2. Il nostro integrale diventa dunque:

$$\int\int \frac{\mathrm{P}-\mathrm{P}'}{r^3} \frac{\Gamma \cdot (\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2} de\, de' ;$$

oppure scambiando P con P′, ciò che nulla altera, e prendendo la semisomma dei due valori così ottenuti:

$$\frac{1}{2} \int\int \frac{\mathrm{P}-\mathrm{P}'}{c r^3} [\mathbf{\Gamma} \cdot (\mathrm{P}-\mathrm{P}')]\, de\, de' .$$

Osserviamo che, nella nostra approssimazione Γ è costante per tutti i punti e può quindi portarsi fuori dagli integrali. Perciò la componente x dell'integrale precedente è:

$$\frac{1}{2c^2} \left\{ \Gamma_x \int\int \frac{(x-x')^2}{r^3} de\, de' + \Gamma_y \int\int \frac{(y-y')(x-x')}{r^3} de\, de' \right.$$
$$\left. + \Gamma_z \int\int \frac{(z-z')(x-x')}{r^3} de\, de' \right\} .$$

Ora, siccome il sistema ha simmetria sferica, ad ogni segmento P P′ ne corrispondono infiniti altri distinti solo per l'orientazione. Nei tre integrali potremo

(9) Propriamente il numero di cui si trascurano i quadrati è $\Gamma l / c^2$ essendo l la massima lunghezza che interviene nel problema. È evidente che tale approssimazione è nei casi comuni più che giustificata.

perciò sostituire

$$(x-x')^2\,,\ (x-x')\,(y-y')\,,\ (x-x')\,(z-z')$$

coi loro valori medii per tutte le possibili orientazioni di P P', che sono: $\frac{1}{3}r^2, 0, 0$.

Con ciò la componente x diventa:

$$\frac{\Gamma_x}{3c^2}\,\frac{1}{2}\int\!\!\int\frac{de\,de'}{r}\,.$$

Osserviamo ora che l'espressione

$$\frac{1}{2}\int\!\!\int\frac{de\,de'}{r}$$

non è altro che l'energia elettrostatica u; tornando allora alla scrittura vettoriale troviamo per l'integrale che figura in (4) l'espressione: $\frac{u}{3c^2}\,\mathbf{\Gamma}$. La (4) diventa così:

$$\frac{u}{c^2}\,\mathbf{\Gamma}=\mathbf{F} \tag{5}$$

che esprime appunto che la massa elettromagnetica è u/c^2.